

MŰSZAKI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI
EGYESÜLETEK SZÖVETSÉGE
SZEGEDI INTÉZŐBIZOTTSÁGÁNAK

ÉVKÖNYVE

Szeged, 1964

AZ AUTOMATÁK MATEMATIKAI ELMÉLETÉRŐL

GÉCSEG FERENC és PEÁK ISTVÁN

József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete, Szeged

Az objektív valóság egyes egységei nem egymástól elszigetelten, hanem környezetükkel szoros kölcsönhatásban léteznek. E kölcsönhatás a legáltalánosabban úgy jellemezhető, hogy a valóságos világ egyes egységeit a környezetükből minden időpillanatban érkező különféle fizikai, kémiai, biológiai, pszichológiai és egyéb behatások érik, amelyek az egységben változást idéznek elő és e változáson keresztül az illető egység is a legváltozatosabb módon hat az őt körülvevő valóságra. Az objektív valóság valamely egységét illetően az őt környezetéből érő behatások összességét összefoglaló néven bemenő információnak, azon hatások összességét pedig, amelyeket az illető egység a bemenő információ hatására környezetének átad, kimenő információnak nevezzük. Ilyen megfogalmazásban tehát az objektív valóság bármely egysége információ átalakítására alkalmas, ti. valamely bemenő információt bizonyos kimenő információvá alakít át, miközben az illető egység belső állapota is megváltozik. Érvényes ez az ember által alkotott gépekre, a gyakorlatban előforduló különféle szolgáltató és a termelésben felhasznált berendezésekre, az automata telefonközpontokra, a nagyteljesítményű elektromos számológépekre, de magára az emberre, sőt általánosabban az élő szervezetekre, vagy az emberi társadalom egyes egységeire is. A világ megismerése szempontjából fontos kérdés annak eldöntése, hogy az objektív valóság valamely kiszemelt egysége valamely bemenő információt milyen kimenő információvá alakít át. Részben más szempontból ugyan, de hasonló fontossággal bír az is, hogy meg tudjunk adni olyan rendszereket, meg tudjunk konstruálni olyan berendezéseket, amelyek valamely előre megadott információ-átalakításra képesek.

Az automaták alábbi fogalma az információ-átalakítás tekintetében az objektív valóság egyes egységeinek absztrakt matematikai modelljeként tekinthető.

Az automaták információk átalakítására alkalmas rendszerek. Bármely automatahoz tartozik három halmaz: a bemenő jelek halmaza, az automaták belső állapotainak halmaza és a kimenő jelek halmaza. Az automata diszkrét időskálával dolgozik (más szóval csak meghatározott időpontokban kaphat bemenő jelet), bármely időpillanatban egy meghatározott belső állapotban van és a bemenő jelek egy sorozatára úgy reagál, hogy e jelsorozat bármely jelének hatására kiad egy jól meghatározott jelet, miközben maga az automata általában egy új belső állapotba megy át. Ilyen módon bármely automata jelsorozatok valamely halmazának jelsorozatok egy más halmazába való leképezését adja meg, ahol e jelsorozatok a bemenő, ill. a kimenő információ hordozói. Az automata viselkedését, más szóval, hogy adott állapotból bizonyos bemenő jel hatására milyen új állapotba megy át

és közben milyen kimenő jelet ad ki, matematikailag két kétváltozós függvénnyel szokás leírni.

Noha az automaták vizsgálata rövid, csak mintegy tízéves múltra tekint vissza, máris komoly sikereket ért el elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt és számos — főként amerikai és szovjet — kutató munkája eredményeként ma már joggal beszélhetünk az automaták elméletéről.

Az automaták elmélete két fő irányban fejlődik: matematikai, ezen belül absztrakt és strukturális, továbbá technikai realizációs elmélet. A matematikai elmélet nem veszi figyelembe a vizsgált automata reális felépítését, a technikai realizációs elmélet pedig ezzel szemben éppen azt vizsgálja, hogy valamilyen információ-átalakításra alkalmas automata hogyan építhető fel bizonyos technikai elemekből (elektroncsövek, félvezetők, ferromágneses elemek stb.). A matematikai elmélet felhasználja a matematika több ágának, így az algebraének, a gráfelméletnek, a matematikai logikának, a Boole-féle függvények elméletének módszereit és eredményeit. Az automaták matematikai elmélete a matematika egyik legmodernebb és a gyakorlati alkalmazások szempontjából egyik legfontosabb fejezete.

Dolgozatunk ismertető jellegű, már meglevő eredményeket dolgoz fel. Célja, hogy rövid áttekintést adjon az automaták matematikai elméletének módszereiről és legfontosabb eredményeiről és ismertesse az ilyen irányú kutatások fő irányát. A dolgozatban szabatos fogalomalkotásra és a fellépő fogalmak közötti sokoldalú kapcsolatok bemutatására törekedtünk. A korlátozott terjedelem miatt el kellett azonban tekintenünk az állítások pontos bizonyításától és a legtöbb esetben meg kellett elégednünk azzal, hogy a bizonyítás gondolatmenetét röviden vázoljuk. Ennek ellenére remélni szeretnénk, hogy sikerült az olvasó érdeklődését felkelteni a modern matematika ezen érdekes és a gyakorlat szempontjából olyannyira fontos ága iránt. Ha emellett sikerült még bepillantást is nyújtanunk az automaták matematikai elméletének problematikájába, legfontosabb eredményeibe és módszereibe, akkor kitűzött célunkat elértük.

I. Az automaták absztrakt elmélete

1. Az automata fogalma. *Mealy-féle automatának* (ld. G. H. MEALY [13]) nevezünk minden olyan $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ rendszert, amely áll a nem üres A , X és Y halmazokból és az $A \times X$ szorzat-halmazon értelmezett $\delta: A \times X \rightarrow A$ és $\lambda: A \times X \rightarrow Y$ függvényekből. Az A halmazt az A automata (*belső*) *állapotai* halmazának, az X és Y halmazokat pedig az A *bemenő jelei*, ill. *kimenő jelei* halmazának nevezzük. Az $A \times X$ szorzat-halmazon értelmezett δ és λ függvényeket az automata *átmenet-függvényének*, ill. *kimenet-függvényének* mondjuk és ezeket a következő módon definiáljuk: Az A automata bármely $a (\in A)$ belső állapotára és bármely $x (\in X)$ bemenő jelére $\delta(a, x) \in A$ és $\lambda(a, x) \in Y$. Ez azt jelenti, hogy ha az A automata valamely időpillanatban egy bizonyos $a (\in A)$ belső állapotban van és ebben az állapotban egy $x (\in X)$ bemenő jelet kap, akkor az x jel hatására A átmegy a $\delta(a, x) (\in A)$ állapotba, miközben kiadja a $\lambda(a, x) (\in Y)$ kimenő jelet.

A *Moore-féle automata* (ld. E. F. MOORE [15]) a Mealy-féle automatának olyan speciális esete, amikor az automata kimenetfüggvénye $\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$ alakú, ahol $\mu(a) (\in Y)$ a belső állapotok valamely egyértékű függvénye. Nyilvánvaló, hogy a δ függvénnyel együtt a μ függvény egyértelműen meghatározza az automata viselkedését. Így a Moore-féle automatákat $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ alakban adhatjuk

meg. A μ függvényt az $\mathbf{A}$ automata *jel-függvényének*, $\mu(a)$ -t pedig az a belső állapot jelének nevezzük.

Szokás élni további specializálással is. Ha valamely $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore-féle automata esetén az A és Y halmazok azonosak és a $\mu(a)$ jel-függvény az A halmaznak önmagára való identikus leképezését adja, akkor az Y halmaztól és a μ függvénytől eltekinthetünk és az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ alakban adható meg. Az ilyen automatákat *kimenő jel nélküli*, vagy *Medvegyev-féle automatáknak* szokás nevezni (I. Ю. Т. Медведев [14]).

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az absztrakt elmélet szempontjából a Moore-féle automata fogalma a Mealy-féle automata-fogalomhoz képest csak látszólagos specializálást jelent, másrészt megemlíjtjük, hogy sok esetben elegendő kimenő jel nélküli automatákra szorítkozni.

Megjegyezzük, hogy a legáltalánosabb értelemben vett (Mealy-féle) automatákra megadott minden fogalom specializálással (és esetleg kevés módosítással) átvihető Moore-féle és Medvegyev-féle automatákra is. Ezért mi a továbbiakban az egyes fogalmakat legtöbbször Mealy-féle automaták esetére definiáljuk.

Ha a következőkben automatát mondunk és semmi további kikötést nem teszünk, akkor ezen a Mealy-vagy Moore-féle automaták bármelyikét érthetjük.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából elsőrendű fontossággal bírnak azok az automaták, amelyekhez tartozó minden halmaz véges. Az ilyen automatákat *véges automatáknak* nevezzük.

Egy automatát *iniciálisnak* mondunk, ha valamely belső állapota ki van tüntetve. Ezt a kitüntetett állapotot az automata *kezdő állapotának* nevezzük. Úgy tekintjük, hogy az iniciális automata működésének kezdetén a kezdő állapotban van. Egy iniciális Mealy-féle automatát $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ alakban adunk meg, ahol $a_0 (\in A)$ az $\mathbf{A}$ kezdő állapota. Megállapodunk még abban, hogy iniciális Moore-féle automata a kezdő állapotban nem ad ki jelet.

Megjegyezzük, hogy az algebrai struktúrák elméletéből ismert sok fogalom, így pl. a részstruktúra, a homomorfizmus, izomorfizmus stb. fogalma természetes módon átvihető automaták esetére is.

Az egymással izomorf automatákat absztrakt szempontból azonosaknak fogjuk tekinteni.

Végül utalunk arra, hogy szokás olyan általánosabb értelemben vett automatákat is vizsgálni, amelyeknél a δ , ill. λ függvények nem minden a, x ($a \in A, x \in X$) párra vannak értelmezve. Noha az ilyen, ún. *parciális automaták* vizsgálata gyakorlati szempontból is igen fontos, e cikk keretében mi csak a fentiekben megadott, ún. *teljesen definiált* (nem *parciális*) automatákkal foglalkozhatunk¹.

2. A δ és λ függvények értelmezésének kiterjesztése. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy-féle automata és jelölje $F(A)$, $F(X)$ és $F(Y)$ rendre az A , X , ill. Y által generált szabad félcsoporthat². A δ és λ függvények értelmezését kiterjesztjük a következő módon: Legyen $\delta: A \times F(X) \rightarrow F(A)$ és $\lambda: A \times F(X) \rightarrow F(Y)$ úgy, hogy ha $a \in A$ tetszőleges állapot és $p = x_1 x_2 \dots x_k$ ($\in F(X)$) tetszőleges szó, akkor az $a \in A$, $p \in F(X)$ párhoz tartozó függvényértékeket a

¹ Az automaták szabatos fogalmára vonatkozóan [13] és [15] mellett még a [6] és [16] dolgozatokra utalunk. Itt jegyezzük meg, hogy V. M. GLUSKOV [6] dolgozata magyar fordításban is megjelenik. A cikk első részének fordítása már meg is jelent: Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl., 13, 287, 1963.

$$(1) \quad \delta(a, p) = a_1 a_2 \dots a_k \quad (a_1, a_2, \dots, a_k \in A)$$

és

$$(2) \quad \lambda(a, p) = y_1 y_2 \dots y_k \quad (y_1, y_2, \dots, y_k \in Y)$$

képletek szolgáltatassák, ahol $a_1 = \delta(a, x_1)$, $a_2 = \delta(a_1, x_2)$, ..., $a_k = \delta(a_{k-1}, x_k)$ és $y_1 = \lambda(a, x_1)$, $y_2 = \lambda(a_1, x_2)$, ..., $y_k = \lambda(a_{k-1}, x_k)$. $F(X)$ -et az A automata *bemenő félcsoportjának*, $F(Y)$ -t pedig A *kimenő félcsoportjának* nevezzük. Ha $p \in F(X)$ és $q \in F(Y)$, akkor p -t *bemenő szónak*, q -t pedig *kimenő szónak* mondjuk.

Az absztrakt elméletben $F(X)$ szavai jelentik a bemenő, $F(Y)$ szavai pedig a kimenő információt. Az (1) és (2) egyenletek azt mutatják, hogy egy Mealy-féle automata úgy működik, hogy tetszőleges $F(X)$ -beli $p = x_1 x_2 \dots x_k$ szó hatására állapotok egy $a_1 a_2 \dots a_k$ sorozatán megy át és közben kiad valamilyen $q = y_1 y_2 \dots y_k$ ($\in F(Y)$) szót.

Megjegyezzük, hogy a δ és λ függvények kiterjesztése értelemszerűen adódik Moore- és Medvegyev-féle automatákra.³

3. Automata által indukált leképezés. Az $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy-féle automata bármely $a (\in A)$ belső állapota indukálja az $F(X)$ szabad félcsoporthoz az $F(Y)$ szabad félcsoporthoz való

$$(3) \quad \varphi_a(p) = \lambda(a, p) \quad (p \in F(X))$$

leképezését. Valóban, (2) szerint, a φ_a leképezés $F(X)$ minden egyes p szavához $F(Y)$ valamely jól meghatározott $\lambda(a, p)$ szavát rendeli hozzá.

Az $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciális Mealy-féle automata által indukált leképezésen az A automata $a_0 (\in A)$ kezdő állapota által indukált

$$\varphi_{a_0}(p) = \lambda(a_0, p) \quad (p \in F(X))$$

leképezést értjük.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy ez a $\varphi_{a_0}: F(X) \rightarrow F(Y)$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal: (a) megtartja a szavak hosszát², azaz bármely $p (\in F(X))$ szóra $|p| = |\varphi_{a_0}(p)|$ teljesül, (b) szó kezdő szeletét² a képszó megfelelő kezdő szeletébe viszi át.

Megfordítva, tetszőleges $F(X)$ és $F(Y)$ szabad félcsoporthoz esetén bármely, az (a) és (b) feltételeknek eleget tevő $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ leképezéshez van olyan kimenő jellel rendelkező iniciális automata, amely a φ leképezést indukálja. Elegendő kimutatni, hogy létezik ilyen Moore-féle automata. Egy megfelelő automatát így konstruálhatunk meg: Legyen $A = (F(X), e, X, Y, \delta, \mu)$, ahol e az $F(X)$ szabad félcsoporthoz üres szava és legyen

$$\delta(p, x) = px,$$

továbbá

$$\mu(p) = \begin{cases} \varphi(p) \text{ utolsó betűje, ha } p \neq e \\ \text{nincs értelmezve, ha } p = e. \end{cases}$$

² Legyen Z tetszőleges halmaz. A Z által generált szabad félcsoporthoz értjük a Z halmaz elemeiből megalkotott összes véges sorozatok $F(Z)$ halmazát, ha $F(Z)$ -ben a szorzás műveletét a következő módon értelmezzük: az $F(Z)$ -beli $p = z_1 z_2 \dots z_k$ és $q = z'_1 z'_2 \dots z'_l$ elemek, „szavak” szorzatán a $pq = z_1 z_2 \dots z_k z'_1 z'_2 \dots z'_l (\in F(Z))$ „szót” értjük. Mi $F(Z)$ -t a továbbiakban mindig egységelemesnek tekintjük, tehát $F(Z)$ elemei közé soroljuk az e „üres szót” is. Valamely $p = z_1 z_2 \dots z_k$ szó kezdő szeletén az összes $z_1 z_2 \dots z_i$ ($0 \leq i \leq k$) alakú szavakat, a p hosszán pedig a $|p| = k$ számot értjük.

³ Ha a δ és λ függvények kiterjesztését az automata fogalmához hozzászámítjuk, akkor indokolt a következő automata-fogalom: Kimenő jel nélküli automata minden olyan $A = (A, S, \delta)$ rendszer, ahol A nem üres halmaz (állapotok halmaza), S tetszőleges félcsoporthoz és δ az átmenet-függvény, amelyre $\delta(a, s_1 s_2) = \delta(\delta(a, s_1), s_2)$ ($a \in A; s_1, s_2 \in S$) teljesül. Ezt az automata-fogalmat általában akkor használják, ha az automatáknak más algebrai struktúrákkal való kapcsolatokat vizsgálják. Ld. pl. A. C. FLECK [3].

Könnyű belátni, hogy A indukálja az adott q leképezést, más szóval a q és q_e leképezések megegyeznek.

4. Automaták és automata-leképezések. Az előző pontban nyertük, hogy azok és csak azok a $q: F(X) \rightarrow F(Y)$ leképezések indukálhatók kimenő jellel rendelkező iniciális automaták által (más szóval, állíthatók elő iniciális automatákban), amelyek eleget tesznek az (a) és (b) feltételeknek. Az ilyen leképezéseket *automata-leképezéseknek* nevezzük.

Ha a bevezetésben azt mondtuk, hogy az automaták információk bizonyos típusú átalakítására képes rendszerek, akkor ezt most úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az automaták a fenti feltételeknek eleget tevő, ún. automata-leképezések előállítására alkalmasak.

5. Automaták ekvivalenciája. A közös bemenő és kimenő halmazzal rendelkező iniciális $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ és $B = (B, b_0, X, Y, \delta', \lambda')$ automatákat *ekvivalenseknek* mondjuk, ha ugyanazt az $F(X) \rightarrow F(Y)$ leképezést indukálják, más szóval, ha a q_{a_0} és q_{b_0} leképezések megegyeznek, ami (3) szerint azt jelenti, hogy bármely $p (\in F(X))$ szóra $\lambda(a_0, p) = \lambda'(b_0, p)$ teljesül.

Az automata-leképezéseknek előállítása szempontjából az egymással ekvivalens automatákat nem tekintjük különbözőeknek.

Már az 1. pontban jeleztük, hogy az *absztrakt elmélet szemszögéből* a Moore-féle automata csak látszólag speciális esete a Mealy-féle automatának. Ez abban az értelemben igaz, hogy már Moore-féle automaták által is indukálhatók mindazok a leképezések, amelyek Mealy-féle automatákban előállíthatók. Kimutatható ugyanis (ld. A. GILL [4], A. Ш. Блох [2] és B. М. Глушков [6]), hogy *bármely iniciális Mealy-féle automatahoz létezik vele ekvivalens iniciális Moore-féle automata*.

A bizonyítás céljából legyen $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges iniciális Mealy-féle automata. Egy vele ekvivalens Moore-féle automatát a következő módon konstruálhatunk meg: Legyen $A' = (A', a_0, X, Y, \delta', \lambda')$, ahol az A' halmaz áll $a_0 (\in A)$ -ból és az összes (a, x_x) $(a \in A, x_x \in X)$ párból. A δ' és λ' függvények pedig legyenek a következők:

$$(4) \quad \delta'(a', x_\beta) = \begin{cases} (a_0, x_\beta) & \text{ha } a' = a_0 \\ (\delta(a, x_x), x_\beta) & \text{ha } a' = (a, x_x) \end{cases} \quad (a' \in A', x_\beta \in X),$$

$$(5) \quad \lambda'(a', x_\beta) = \begin{cases} \lambda(a_0, x_\beta) & \text{ha } a' = a_0 \\ \lambda(\delta(a, x_x), x_\beta) & \text{ha } a' = (a, x_x) \end{cases} \quad (a' \in A', x_\beta \in X).$$

Állításunk igazolásához elegendő kimutatnunk, hogy a most megkonstruált A' automata Moore-féle és A -val ekvivalens. A

$$\lambda'(a_0, x_\beta) = \lambda(a_0, x_\beta) = \lambda(\delta'(a_0, x_\beta))$$

$$\lambda'((a, x_x), x_\beta) = \lambda(\delta(a, x_x), x_\beta) = \lambda(\delta'((a, x_x), x_\beta))$$

számolással adódik, hogy A' valóban Moore-féle automata, hiszen e két utolsó egyenlet szerint A' jel-függvényeként választható a $\mu = \lambda$ függvény. Másrészt (4) és (5) alapján nem nehéz belátni, hogy A és A' ekvivalensek.

A konstrukcióból látható, hogy ha A véges, akkor A' is véges. Érvényes tehát a feltételnek az a fontos kiegészítése is, hogy bármely véges iniciális Mealy-féle automatahoz van vele ekvivalens véges iniciális Moore-féle automata.

A most bebizonyítottak alapján a leképezéseknek automatákban való előállítására tekintetben Moore-féle automatákra szorítkozhatunk.

6. Automaták analízise és szintézise. Már a 4. pontban hangsúlyoztuk, hogy az automaták szerepe abban nyilvánul meg, hogy bizonyos típusú (ti. az (a) és (b) feltételeknek eleget tevő) $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ alakú leképezések megadását és leírását tesszük lehetővé.

Az automaták és az automata-leképezések kapcsolatát tekintve két fontos kérdés fogalmazható meg természetes módon:

(1) Valamely előre megadott automatához hogyan lehet az automatától függetlenül leírni azt a leképezést, amelyet ez az automata indukál? E feladat megoldását *analízisnek* nevezzük.

(2) Adott automata-leképezéshez hogyan lehet megadni (legalább egy) olyan automatát, amely ezt a leképezést indukálja? Ezt a feladatot *szintézisnek* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a szintézis feladata nem egyértelmű, hiszen egy adott leképezés általában több, egymással nem izomorf automatában is előállítható. Egyértelművé lehet azonban tenni azzal, hogy a keresett automatára további kikötéseket is teszünk.

7. Véges automaták analízise és szintézise. Az analízis és szintézis feladata a fenti megfogalmazásban túlságosan általános. Ezért kiragadunk egy szűkebb automata-osztályt, nevezetesen a véges automaták osztályát és az analízis és a szintézis feladatát csak véges automatákra fogalmazzuk meg pontosan. Ezzel kapcsolatban azonban egy további probléma is felvetődik:

(0) Meg kell adnunk a véges automatákban előállítható automata-leképezéseknek az automatáktól független leírását. Keresnünk kell tehát olyan írásmódot, olyan nyelvet, amelyben mindenekelőtt el tudjuk dönteni, hogy valamely e nyelvben megadott automata-leképezés előállítható-e véges automatában vagy sem.

Ezek után véges automatákra az analízis és a szintézis így fogalmazható meg:

(1') Bármely adott véges automata esetén meg kell adnunk az említett nyelvben azt a leképezést, amelyet ez az automata indukál.

(2') Ha ebben a nyelvben adva van egy véges automata által indukálható leképezés, akkor meg kell tudnunk szerkeszteni azt a véges automatát, amely az adott leképezést indukálja és belső állapotainak halmaza minimális számosságú.

Kimutatható, hogy ilyen megfogalmazásban a szintézis feladata már egyértelmű, mert az ott kívánt automata a kiindulási leképezés által izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott.

Megjegyezzük továbbá, hogy a szintézis feladatát két, egymástól elhatárolt lépésben szokás megoldani. Az említett nyelvben adott, véges automatában előállítható leképezéshez megszerkesztünk valamilyen véges iniciális automatát, amely ezt a leképezést indukálja, majd ebből az automatából kiindulva megkonstruáljuk azt az (izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott) automatát, amely az előbbivel ekvivalens és belső állapotainak száma a lehető legkisebb. A szintézisnek ezt az utóbbi lépését minimizációnak szokás nevezni (ld. D. D. AUFENKAMP és F. S. HOHN [11]).

8. Az esemény fogalma. Esemény-algebra. Most olyan nyelvet ismertetünk, amely rendelkezik a (0) alatt megkívánt tulajdonságokkal, amelyben tehát le lehet írni az automatától függetlenül azokat a leképezéseket, amelyek véges automaták által indukálhatók. Ilyen nyelvről szolgálhat az események nyelve (ld. S. C. KLEENE [9]).

Tekintsük a véges X halmaz által generált $F(X)$ szabad félcsoportot. Eseménynek nevezzük az $F(X)$ félcsoport bármely S részhalmazát. Speciálisan, az események közé soroljuk $F(X)$ üres e szavát, az X halmaz elemeit (egyelemű események), magát $F(X)$ -et (univerzális esemény) és azt az eseményt, amely egyetlen $F(X)$ -beli szót sem tartalmaz (lehetetlen esemény). Az e üres szót mint eseményt, továbbá az egyelemű eseményeket *elemi eseményeknek* nevezzük. Az $F(X)$ félcsoport összes részhalmazaiából álló $E(X)$ eseményhalmazban az alábbi műveleteket definiáljuk. Legyen $S_1, S_2 \in E(X)$. Azt az $S_1 \cup S_2$ eseményt, amely azokból és csak azokból az $F(X)$ -beli szavakból áll, amelyek S_1 és S_2 közül legalább az egyikben benne vannak, az S_1 és S_2 események összegének, azt az $S_1 S_2$ eseményt pedig, amely az összes $p_1 p_2$ ($p_1 \in S_1, p_2 \in S_2$) szavakból áll, az S_1 és S_2 események szorzatának nevezzük. Az $S (\in E(X))$ esemény iteráltján azt az $\{S\}$ eseményt értjük, amely az összes $p_1 p_2 \dots p_k$ ($p_i \in S$ ($i = 1, \dots, k$); $k = 0, 1, \dots$) szavakból áll. $E(X)$ -et a most bevezetett összeadás, szorzás és iteráció műveletével együtt az X halmazhoz tartozó *esemény-algebrának* nevezzük. Könnyen látható, hogy az esemény-algebrában a műveletekre vonatkozóan érvényesek bizonyos (az algebrai struktúrákban szokásos, vagy ezekhez hasonló) azonosságok.

9. Reguláris események. Az X véges halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra egy S eseményét *regulárisnak* nevezzük, ha S vagy a lehetetlen esemény, vagy pedig az elemi eseményekből az összeadás, szorzás és az iteráció műveletének véges sokszor való alkalmazásával áll elő.

Megjegyezzük, hogy az előző pontban említett azonosságok miatt az S reguláris esemény ilyen előállítására nincs egyértelműen meghatározva. Az S minden ilyen előállítását, amely tehát azt mutatja meg, hogy S a mondott műveletek segítségével hogyan áll elő az elemi eseményekből, az S *reguláris kifejezésének* nevezzük. (Ha S a lehetetlen esemény, akkor S reguláris kifejezéséül bármely speciális jelet választhatunk, pl. az üres halmaz jelét is.)

Könnyű megmutatni, hogy nem minden esemény reguláris. Nem reguláris pl. az $X = \langle x_1, x_2 \rangle$ halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra azon eseménye, amely azokból és csak azokból az $F(X)$ -beli szavakból áll, amelyek azonos számú x_1 -ből és x_2 -ből tevődnek össze (ld. B. M. Глышков [6]).

10. Automata-leképezések és események kapcsolata. Legyenek X és Y tetszőleges véges halmazok és legyen $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ valamilyen automata-leképezés. Megmutatjuk, hogy az ilyen φ leképezések események bizonyos rendszerével jellemezhetők. Jelölje S_y minden $y (\in Y)$ -ra azon $p (\in F(X))$ szavak halmazát, amelyekre a $\varphi(p) (\in F(Y))$ utolsó betűje y és tekintsük az ilyen $S_y (\in E(X))$ események H halmazát. Nyilvánvaló, hogy ez a H halmaz rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $\alpha)$ H véges számosságú, $\beta)$ ha $y \neq y'$ ($y, y' \in Y$) akkor az $S_y \cup S_{y'}$ metszet üres, $\gamma)$ bármely $p (\neq e; \in F(X))$ szóhoz van olyan $y (\in Y)$, hogy $p \in S_y$ és $\delta)$ bármely $y (\in Y)$ -ra $e \notin S_y$.

Általában, egy véges halmazhoz tartozó esemény-algebra eseményeinek olyan rendszerét, amely az $\alpha), \beta), \gamma)$ és $\delta)$ feltételeknek eleget tesz, *automata-esemény-rendszernek* nevezzük.

Ha tehát X és Y véges halmazok, akkor minden $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ automata-leképezéshez hozzárendelhető az $E(X)$ esemény-algebra egy automata-esemény-rendszere. Könnyű belátni, hogy megfordítva, az X véges halmazhoz tartozó $E(X)$ esemény-algebra bármely H automata-eseményrendszere a (véges) Y halmaz elemeinek jelölésétől eltekintve egyértelműen meghatározza azt a $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$

automata-leképezést, amelyhez a fenti módon tartozó automata-eseményrendszer éppen H .

Ezzel nyertük, hogy az automata-leképezések bizonyos osztálya és az események között szoros kapcsolat van. Egyértelműen jellemezni tudtuk ugyanis az események nyelvén azokat a leképezéseket, amelyek olyan $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciális automátákban állíthatók elő, amelyekre az X és Y halmazok végesek.

11. Az automata és az általa indukált leképezés kapcsolata az események nyelvén.

E pontban csak olyan iniciális automátákat tekintünk, amelyeknél mind a bemenő, mind a kimenő jelek halmaza véges.

Legyen $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ ilyen Mealy-féle automata és legyen $y (\in Y)$ az A tetszőleges kimenő jele. Jelölje S_y azoknak a $p (\in F(X))$ szavaknak a halmazát, amelyekre a $q_{a_0}(p) (\in F(Y))$ szó utolsó betűje y . Fussa be y az A automata Y kimenő halmazát és jelölje H_A az eközben előálló $S_y (\subseteq F(X))$ események összességét. A H_A eseményrendszert az A automatához tartozó *kanonikus eseményrendszernek* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy egy automatához tartozó kanonikus eseményrendszer mindig automata-eseményrendszer.

Másrészt a definícióból közvetlenül adódik az a fontos tény, hogy *egy olyan $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ automata, amelyre az X és Y halmazok végesek, akkor és csak akkor indukál valamely $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ automata-leképezést, ha a φ -hez tartozó automata-eseményrendszer egybeesik az A automatához tartozó kanonikus eseményrendszerrel.*

Ennek megfelelően olyan $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ automáták esetén, amelyekre az X és Y halmazok végesek, a 6. pontban tárgyalt analízis és szintézis így fogalmazható át:

(1'') adott automatához meghatározandó a hozzá tartozó kanonikus eseményrendszer, majd az ehhez a 10. pont értelmében rendelt automata-leképezés;

(2'') ha adott egy $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ (X és Y véges halmazok) automata-leképezés; meghatározandó a φ -hez a 10. pont értelmében tartozó automata-eseményrendszer, majd megszerkesztendő olyan automata, amelyhez tartozó kanonikus eseményrendszer egybeesik a φ -hez rendelt automata-eseményrendszerrel.

12. Véges automátákban előállítható leképezések. Az előző pontban olyan iniciális Mealy-féle automatákkal foglalkoztunk, amelyeknél mind a bemenő jelek, mind a kimenő jelek halmaza véges. Most azonban tovább szűkítjük a vizsgált automáták osztályát. A továbbiakban a belső állapotok halmazának végeességét is feltételezzük, más szóval, csak véges automatákkal foglalkozunk.

Arra vonatkozóan, hogy milyen leképezések állíthatók elő véges automátákban, bebizonyítható (ld. S. C. KLEENE [9]), hogy egy $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ (X és Y véges halmazok) automata-leképezés akkor és csak akkor állítható elő véges iniciális Mealy-féle automatában, ha a φ -hez rendelt automata-eseményrendszerhez tartozó minden esemény reguláris.

Ez az eredmény a 7. pontban a (0) alatt megfogalmazott feladatot megoldja, hiszen az automatáktól független teljes leírását adja a véges automátákban előállítható leképezéseknek.

Rendkívül fontos továbbá az a tény, hogy e tétel ismert bizonyításai mind konstruktívok, azaz a tétel minden bizonyítása egyszersmind olyan általánosan használható eljárást (algoritmust) is szolgáltat, amely egyrészt bármely adott véges iniciális automata esetén lehetővé teszi, hogy megadjuk az automatához tartozó

kanonikus eseményrendszert⁴, majd ehhez megkonstruáljuk a 10. pontban definiált automata-leképezést (és ezzel az analízis feladatát véges automatákra megoldjuk); másrészt lehetőséget ad arra, hogy ha már valamely konkrétan adott $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$ (X és Y véges halmazok) automata-leképezés esetén a φ -hez tartozó automata-eseményrendszert meghatároztuk és konstatáltuk, hogy ezen eseményrendszer minden eseménye reguláris, továbbá megadtuk az események valamilyen reguláris kifejezéseit, akkor ezekből a reguláris kifejezésekből kiindulva meg tudunk szerkeszteni olyan automatát, amelyhez tartozó kanonikus eseményrendszer egybeesik a φ -hez rendelt automata-eseményrendszerrel (ami a véges automatákra (2) alatt megfogalmazott szintézis feladatának megoldását jelenti).

Megjegyezzük még, hogy a Mealy- és Moore-féle automatáknak az 5. pontban bemutatott ekvivalenciája miatt tárgyalásunk folyamán az eseményekkel kapcsolatban is szorítkozhattunk volna iniciális Moore-féle automatákra, sőt a Moore-féle automaták közbeiktatásával Medvegyev-féle automatákra is. A legutóbb említett fontos tételt is legegyszerűbb ilyen automatákra bizonyítani és így is szokás eljárni. Cikkünk korlátozott terjedelme miatt azonban nem áll módunkban sem ezt pontosabban kifejteni, sem az utolsó tételt bebizonyítani és az analízis és szintézis esetén használható algoritmusokkal foglalkozni. Megjegyezzük továbbá, hogy az események fogalmának bevezetése az analízis és a szintézis fogalmának bizonyos általánosítását teszi lehetővé, amellyel szemben a fenti értelemben vett analízist és szintézist kanonikus analízisnek és kanonikus szintézisnek nevezhetjük. Mindezekre nézve pl. V. M. GLUSKOV [6] dolgozatára utalhatunk.

II. Az automaták strukturális elmélete

Az I. részben az automatát mint egységes egészet vizsgáltuk, figyelmen kívül hagyva annak szerkezeti felépítését. A valóságban azonban az automaták egyszerűbb automatákból, *elemekből* tevődnek össze. A strukturális elmélet feladata éppen annak vizsgálata, hogy adott automata hogyan építhető fel elemek összekapcsolásával, kompozíciójával. A strukturális elmélet is absztrakt abból a szempontból, hogy nem veszi figyelembe a reális automata összes tulajdonságait. Eltekint pl. a jelek mibenlététől, az automata működése közben lejátszódó fizikai folyamatoktól stb. A strukturális elmélet azonban nem jut el az absztrakció olyan magas fokára, mint az absztrakt elmélet. A strukturális elmélet, noha mindvégig matematikai eszközökkel dolgozik, mintegy közbülső helyet foglal el az absztrakt és a technikai realizációs elmélet között.

1. A jelek kódolása. Az egyik lényeges különbség a két elmélet között abban van, hogy az absztrakt elméletben eltekintettünk attól, hogy az automata bemenő és kimenő jelei ún. *elemi jelek* adott hosszúságú sorozataiból, azaz az elemi jelekből, mint komponensekből felépített vektorokból állnak. Egy ilyen bemenő, ill. kimenő jelvektor komponenseinek száma attól függ, hogy az automata hány különböző *bemenő pontjára* bocsáthatunk egyidejűleg elemi jelet, ill. az automata hány *kimenő pontján* léphet ki egyidejűleg elemi jel. Minden bemenő ponthoz tartozik egy *bemenő csatorna*, amelyen keresztül az elemi jelek bejutnak az automatába és minden kimenő ponthoz hozzá van rendelve egy *kimenő csatorna*, amelyen át a jelek kilépnek az automatából. Az absztrakt jelekhez való vektorhozzárendelést a *jelek*

⁴ Ld. R. F. McNAUGHTON és H. YAMADA [12] és B. M. ГЛУШКОВ [5].

kódolásának nevezzük. A bemenő és kimenő pontokat megszámozzuk az első m , ill. első n természetes számmal és adott jelvektor esetén az i -edik komponens az i -edik bemenő pontra kerül, ill. az i -edik kimenő ponton jelenik meg.

A továbbiakban egy A automatát az $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda, m, n)$ alakban adunk meg, ahol A az automata belső állapotainak halmaza és $a_0 \in A$; X és Y az elemi bemenő, ill. elemi kimenő jelek halmaza; δ és λ az automata átmenet-, ill. kimenet-függvénye, az m, n számok pedig a bemenő, ill. kimenő csatornák számát jelentik. Az X és Y halmazok $X \cup Y$ egyesítését az A automata *strukturális ábécéjének* nevezzük.

Mi csak olyan automatákkal foglalkozunk, amelyekre $X = Y = \langle 0, 1 \rangle$, mivel a gyakorlatban ezek a leghasználatosabbak.

2. Automata-idő. Minden egyes automatáról feltételezzük, hogy egy diszkrét időskála tartozik hozzá. Az automatához rendelt időskála bármely t időpontjára Mealy-féle automata esetén érvényesek a

$$(1) \quad \delta(a(t), x(t)) = a(t+1)$$

és

$$(2) \quad \lambda(a(t), x(t)) = y(t)$$

egyenletek, ahol $a(t)$ jelenti azt az állapotot, amelyben az automata a t időpillanatban van, $x(t)$ és $y(t)$ pedig azt a bemenő, ill. kimenő jelet jelöli, amelyet az automata a t időpontban kap, ill. amelyet a t időpontban kibocsát.

Moore-féle automaták esetére (1) megtartása mellett (2) helyett az

$$y(t) = \lambda(\delta(a(t-1), x(t-1)))$$

egyenletet tekintjük érvényesnek. Ez azt jelenti, hogy a Moore-féle automata valamely bemenő jel beérkezése után csak egy automata-időegységgel később bocsátja ki a megfelelő kimenő jelet.

3. Memória- és logikai elemek. Mint már említettük, a gyakorlatban előforduló automaták egyszerűbb automaták, elemek kapcsolatai. Az ilyen, ún. elemi automatákat két csoportba soroljuk. Egy elemet *logikai elemnek*, ill. *memória-elemnek* nevezünk aszerint, hogy az elem állapotainak száma egy, vagy ennél több. Nyilvánvaló, hogy a logikai elemek kimenete vektorfüggvénnyel jellemezhető, más szóval, minden m bemenő és n kimenő csatornával rendelkező logikai elemhez megadható olyan q vektorfüggvény, hogy

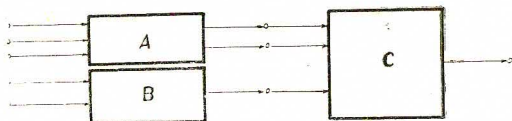
$$q((x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$$

az automata kimenetét adja.

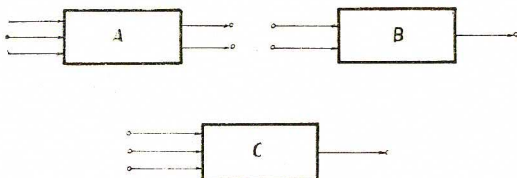
4. Automaták kompozíciója. Legyen adva közös automataidővel rendelkező automaták egy véges halmaza, továbbá m , ill. n számú különböző pont. Ha úgy egyesítünk a halmazhoz tartozó automaták bemenő és kimenő pontjai közül bizonyosakat egymással, valamint a kijelölt m , ill. n számú ponttal, hogy az így keletkező rendszert mint a kijelölt m bemenő ponttal és n kimenő ponttal bíró automatát tekinthetjük, akkor az adott halmazhoz tartozó automaták egy m bemenő pólusú és n kimenő pólusú *kompozíciójáról* beszélünk.

Ha az automata bemenő és kimenő pontjait körrel, magát az automatát téglalappal, az automata bemenő és kimenő csatornáit az automata felé, ill. a kimenő pontok felé mutató nyilakkal jelöljük, akkor az 1. ábrán megadott A, B és C auto-

maták egy 5 bemenő és 1 kimenő pólusú kompozícióját a 2. ábra szemlélteti. A most bemutatott példa is mutatja, hogy automaták kompozíciója nincs egyértelműen meghatározva.



1. ábra



2. ábra

Ha valamely kompozícióban csak logikai elemek szerepelnek, akkor ezt a kompozíciót *kombinációs sémának* nevezzük.

5. Strukturális szintézis. A $\langle 0, 1 \rangle$ strukturális ábécével rendelkező elemek olyan véges osztályát keressük, amelyek mindegyikét korlátlan példányszámban tekintve, tetszőleges strukturális ábécével rendelkező **A** automatához effektíve megadható az elemek olyan kompozíciója, hogy e kompozíció által indukált automataleképezés az **A** automatában előállítható leképezés folytatása. Automaták ilyen véges osztályát *strukturálisan teljesnek*, adott **A** automatához a megfelelő kompozíció megszerkesztését pedig *strukturális szintézisnek* nevezzük.

A $\langle 0, 1 \rangle$ strukturális ábécével rendelkező logikai elemek olyan véges osztályát, amelynek megvan az a tulajdonsága, hogy mindegyik elemét korlátlan példányszámban felhasználva bármely $\langle 0, 1 \rangle$ strukturális ábécével rendelkező **A** logikai elemhez effektíve megadható a tekintett elemek olyan kompozíciója, amelyhez tartozó vektorfüggvény egybeesik az **A**-hoz tartozó vektorfüggvénnyel, *funkcionálisan teljesnek* nevezzük, a megfelelő kombinációs séma megkonstruálását pedig *kombinációs szintézisnek* mondjuk.

Automaták valamely véges osztályát vizsgálva, általában nem várható, hogy ez az osztály strukturálisan vagy funkcionálisan teljes legyen. Bebizonyítható azonban, hogy létezik a $\langle 0, 1 \rangle$ strukturális ábécével rendelkező automaták olyan strukturálisan teljes osztálya, amely logikai elemek egy funkcionálisan teljes osztályából, valamint egy olyan legalább két belső állapottal bíró teljesen összefüggő⁵ Moore-féle automatából áll, amelynek kimenet-függvénye a belső állapotok halmazának a kimenő jelek halmazára való kölcsönösen egyértelmű $\lambda(a) = y$ leképezését szolgáltatja.

A bizonyítás céljából legyen

$$A = (A, a_0, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \delta, \lambda, m, n)$$

tetszőleges automata és

$$B = (B, b_0, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \delta', \lambda', m', n')$$

⁵ Egy automatát teljesen összefüggőnek nevezünk, ha bármely két a, b belső állapotához létezik olyan x bemenő jel, hogy $\delta(a, x) = b$ teljesül.

olyan Moore-féle automata, amely eleget tesz az állításban megadott feltételeknek. Legyen továbbá k és l az A , ill. B halmaz számossága. Ha $s (\cong \log_l k)$ természetes szám, akkor megadható A -nak a B^s hatvány-halmazba⁶ való kölcsönösen egyértelmű φ leképezése. Legyen másrészt C olyan logikai elem, amelynek $sn' + m$ számú bemenő csatornája, sm' számú kimenő csatornája van és amelynek q vektorfüggvényére a

$$q(\lambda'(\varphi(a)_1), \dots, \lambda'(\varphi(a)_s), x_1, \dots, x_m) = (x_{11}, \dots, x_{1m'}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{sm'})$$

és

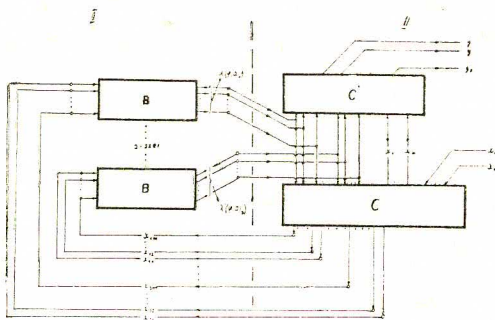
$$\varphi^{-1}(\delta'(\varphi(a)_1, (x_{11}, \dots, x_{1m'})), \dots, \delta'(\varphi(a)_s, (x_{s1}, \dots, x_{sm'}))) = \delta(a, (x_1, \dots, x_m))$$

összefüggések teljesülnek⁷, C' pedig olyan $sn' + m$ számú bemenő csatornával és n számú kimenő csatornával bíró logikai elem, amelynek q' vektorfüggvényére

$$q'(\lambda'(\varphi(a)_1), \dots, \lambda'(\varphi(a)_s), x_1, \dots, x_m) = \lambda(a, x_1, \dots, x_m)$$

teljesül.

A keresett kompozíciót a 3. ábra mutatja. A II-vel jelzett részt, mint a C és C'



3. ábra

logikai elemekből álló kombinációs sémát tekinthetjük. Ezt a kapott kompozíció kombinációs részének, az I-gyel jelölt részt pedig a kompozíció memóriarészének nevezzük. Minthogy a vizsgálatainkban szereplő automata-osztálynak a B automata elhagyása után előálló részosztálya funkcionálisan teljes, ezért a II-vel jelölt kombinációs séma előállítható ezen részosztály elemei valamely kompozíciójaként. Ezzel állításunk érvényességét megmutattuk.

Könnyen lehet találni olyan egyszerű automatákat, amelyek tetszőleges automatát előállító kompozícióban szerepelhetnek memória-elemként. Ezek közül megemlítünk egyet, amely késleltető elem néven ismeretes.

A *késleltető elem* olyan egy bemenő és egy kimenő csatornával rendelkező teljesen összefüggő A Moore-féle automata, amelynek kimenet-függvénye a belső állapotok halmazának a kimenő jelek halmazára való kölcsönösen egyértelmű $\lambda(a) = y$ leképezését szolgáltatja: ha $A = \langle a_1, a_2 \rangle$, $X = Y = \langle 0, 1 \rangle$, akkor a δ és λ függvényekre

⁶ A B^s hatvány-halmaz a B halmaz elemeiből képezett összes s hosszúságú sorozatok halmazát jelenti.

⁷ $\varphi(a)_i$ az $a (\in A)$ elem B^s -beli képének i -edik komponensét jelöli.

$$\delta(a_1, 0) = \delta(a_2, 0) = a_1, \delta(a_1, 1) = \delta(a_2, 1) = a_2$$

és

$$\lambda(a_1) = 0, \lambda(a_2) = 1$$

teljesül.

Ez a példa is mutatja, hogy az automaták kompozíciójában szereplő memória-részhez könnyen találhatunk egyszerű és jól kezelhető memória-elemet. Így automaták valamely struktúráisan teljes osztályának meghatározásánál szorítkozhatunk logikai elemek egy funkcionálisan teljes osztályának kiválasztására.

6. Kombinációs szintézis. A vizsgálatainkban szereplő automaták strukturális ábécéjéül a $\langle 0, 1 \rangle$ halmazt választottuk. Ez lehetővé teszi, hogy az automaták strukturális elméletében a Boole-féle függvények már jobban kidolgozott elméletét alkalmazzuk.

m -változós Boole-féle függvénynek nevezünk minden olyan $f(x_1, \dots, x_m)$ függvényt, amelynek minden x_i ($i = 1, \dots, m$) változója és minden értéke a $\langle 0, 1 \rangle$ halmaz valamely eleme.

Legyen A tetszőleges olyan logikai elem, amelynek strukturális ábécéje a $\langle 0, 1 \rangle$ halmaz, bemenő és kimenő csatornáinak száma pedig m , ill. n . Akkor az A automata q vektorfüggvényére

$$q(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$$

teljesül, ahol minden x_i és y_i a 0 és 1 számok valamelyikét jelenti. A q kimenő vektor minden y_i ($i = 1, \dots, n$) komponense előállítható valamilyen $f_i(x_1, \dots, x_m)$ Boole-féle függvénnyel. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges m bemenő és n kimenő csatornával rendelkező logikai elemet meg lehet adni n olyan logikai elem kompozíciójaként, amely elemek m bemenő és 1 kimenő csatornával bírnak, vagyis amelyek bizonyos m -változós Boole-féle függvényt realizálnak.

A fentiek alapján lehetőség van arra, hogy egy kombinációs séma szintézisét olyan egyszerű Boole-féle függvények keresésére vezessük vissza, amelyek szuperpozíciójaként tetszőleges Boole-féle függvény előáll. A Boole-féle függvények egy ilyen osztályát is *funkcionálisan teljesnek* nevezzük.

Az alábbiakban bevezetünk néhány fogalmat.

Akkor mondjuk, hogy az $f(x_1, \dots, x_n)$ Boole-féle függvény *megőrzi a 0 konstans*, ha rá $f(0, \dots, 0) = 0$ teljesül. Hasonlóan, azt mondjuk, hogy az $f(x_1, \dots, x_n)$ Boole-féle függvény *megőrzi az 1 konstans*, ha $f(1, \dots, 1) = 1$.

Jelölje $\bar{x}_i$ és $f(x_1, \dots, x_n)$ az x_i változó, ill. az $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény negáltját. Az $f(x_1, \dots, x_n)$ Boole-féle függvényt *önduálisnak* mondjuk, ha $f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Legyen $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ a mod 2 összeadást kifejező függvény, más szóval az a függvény, amelyre

$$f(0, 0) = f(1, 1) = 0, f(0, 1) = f(1, 0) = 1.$$

Egy $f(x_1, \dots, x_n)$ Boole-féle függvényt *lineárisnak* nevezünk, ha előállítható

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

alakban, ahol az $a_0, a_1, \dots, a_n$ együtthatók a 0 és 1 értékeket vehetik fel.

Tekintsük az összes olyan n -hosszúságú $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sorozatok halmazát, amelyekre bármely α_i ($i = 1, \dots, n$) értéke 0 vagy 1. E halmazban rendezést definiálunk: ha $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ és $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ e halmaz elemei, akkor

$$a \leq b \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Az $f(x_1, \dots, x_n)$ Boole-féle függvényt *monotonnak* nevezzük, ha $a \leq b$ ($a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$) esetén

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Indukcióval belátható, hogy a 0 konstanst megőrző Boole-féle függvények szuperpozíciója is 0 konstanst megőrző. Hasonló állítás igaz az 1 konstanst megőrző, az önduális, a lineáris és a monoton Boole-féle függvényekre is.

Ezzel megadtuk Boole-féle függvények öt olyan osztályát, amely a szuperpozíció műveletére nézve zárt.

A funkcionális teljességre vonatkozóan bizonyítás nélkül kimondjuk Sz. V. JABLONSKIJ [8] tételét: *Boole-féle függvények valamely S osztálya akkor és csak akkor funkcionálisan teljes, ha az S osztály tartalmaz legalább egy olyan függvényt, amely nem őrz meg a 0 konstanst, legalább egy olyan függvényt, amely nem őrz meg az 1 konstanst, továbbá legalább egy nem önduális, legalább egy nem lineáris és legalább egy nem monoton függvényt.*

E tétel és az alább közölt táblázat segítségével könnyen megadhatók Boole-féle függvények funkcionálisan teljes osztályai.

A függvény neve	A függvény előállítás	Függvények osztályai				
		monoton	lineáris	önduális	megőrzi a 0-konstanst	megőrzi az 1-konstanst
Identikus	x	+	+	+	+	+
0-konstans	0	+	+	—	+	+
1-konstans	1	+	+	—	—	+
Konjunkció	$x_1 x_2$	+	—	—	+	+
Diszjunkció	$x_1 \vee x_2$	+	—	—	+	+
Negáció	$\bar{x}$	—	+	+	—	—
Konjunkció tiltással	$\bar{x}_1 x_2$	—	—	—	+	—
Diszjunkció tiltással	$\bar{x}_1 \vee x_2$	—	—	—	—	+
Konjunkció negációja	$\overline{x_1 x_2}$	—	—	—	—	—
Diszjunkció negációja	$\overline{x_1 \vee x_2}$	—	—	—	—	—
Ekvivalencia	$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$	—	+	—	—	+
Ekvivalencia negációja (összeadás mod 2)	$x_1 + x_2$	—	+	—	+	—

Ahhoz, hogy a táblázatban szereplő minden függvényt meg tudjunk adni, elegendő definiálni a diszjunkciót, a konjunkciót és a negációt.

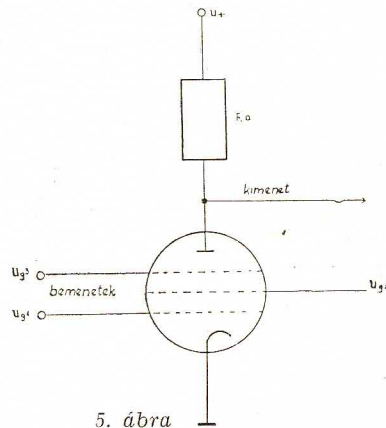
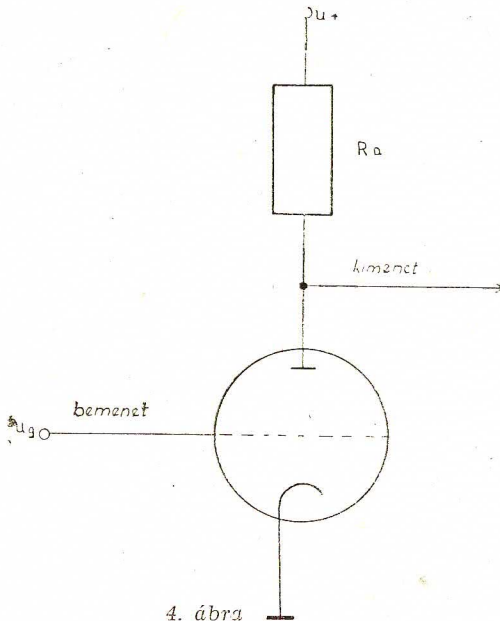
A diszjunkcióra: $0 \vee 0 = 0$; $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$.

A konjunkcióra: $0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.

A negációra: $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$.

7. Boole-féle függvények realizálása. Noha az automaták fizikai tulajdonságainak vizsgálata nem tartozik a struktúrális elmélethez, röviden megadjuk a diszjunkció, a konjunkció és a negáció egy-egy elektroncsöves realizálását, amelyeket Muszka Dániel tudományos munkatárs bocsátott rendelkezésünkre.

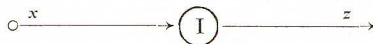
Az elektroncsöves előállításokban leggyakrabban triódát (4. ábra) és pentódát (5. ábra) alkalmazunk.



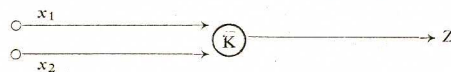
Mindkét ábrán U_+ az anódfeszültséget, R_a az anódelLENállást, U_g pedig a rácsheszültséget jelöli. A bemenő jelek elektromos impulzusok vagy különböző szintű elektromos potenciálok formájában lépnek a cső rácására, a megfelelő kimenő jelek pedig az anódáramkörben jelennek meg. Pentóda alkalmazása esetén a cső vezérlésére az első és harmadik rácst használjuk. A negáció elektroncsöves megvalósítása látható a 6. ábrán. A cső gyengén van előfeszítve. Ha a bemenetre a 0 értéket reprezentáló, negatív jel kerül, akkor ennek hatására a cső lezár és a kimeneten az 1 értéknek megfelelő pozitív jelet kapunk. Abban az esetben pedig, amikor az 1 értéket reprezentáló pozitív jelet adunk a bemenetre, akkor a cső anódárama megnő, így a kimeneten a 0 értéknek megfelelő negatív jelet kapunk.

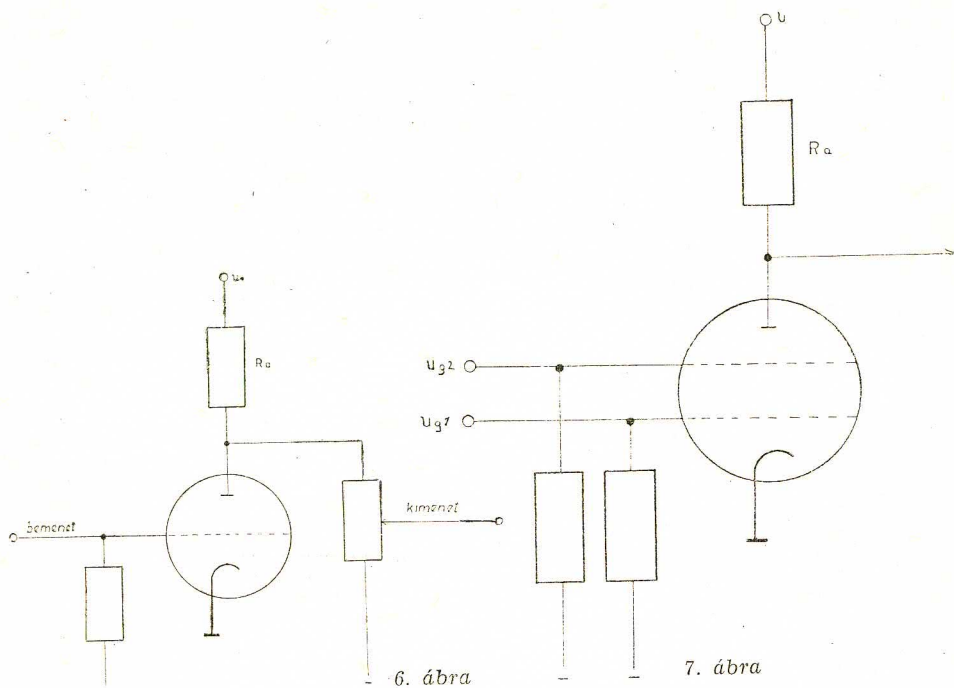
A 7. ábra a konjunkció negációjának pentódás előállítását mutatja. Amikor a pentóda akárcsak az egyik rácával van lezárva (azaz amikor a megfelelő jel 0), az R_a anódelLENálláson keresztül nem folyik áram, így kimenetén a potenciálértéke megközelítőleg U_+ , azaz az 1 jelnek megfelelő. Ha egyidejűleg mindkét rácra magas potenciált adunk, a cső nyitottá válik és kimenetén a 0 jelnek megfelelő U potenciálértéket szolgáltatja.

Ezek után már könnyen létrehozhatunk olyan kapcsolást, amely a konjunkciót és a diszjunkciót állítja elő. Jelölje a negáció elektroncsöves előállítását (invertort) egyszerűen

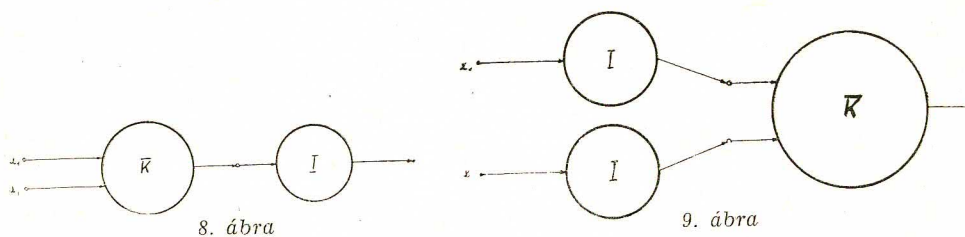


a konjunkció negációjának pentódás előállítását pedig





Figyelembe véve, hogy $\bar{x} = x$ és $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$, a konjunkciót a 8. ábrán látható kapcsolás, a diszjunkciót pedig a 9. ábrán látható kapcsolás realizálja.



Mint ahogy a negáció, konjunkció és diszjunkció együtt funkcionálisan teljes osztályt alkot, ezért a fenti kapcsolások kompozíciójával tetszőleges Boole-féle függvényt realizálhatunk.

8. Boole-féle függvények egyszerűsége. Az előzőekben megmutattuk a negáció, a konjunkció és a diszjunkció fizikai realizálását, valamint azt, hogy tetszőleges Boole-féle függvény előáll ezek szuperpozíciójaként. Természetes módon vetődik fel az a kérdés, hogy adott m -változós Boole-féle függvény realizálásához hány relére, elektroncsőre stb. van szükség.

Minden f Boole-féle függvényhez hozzárendelünk egy L_f pozitív egész számot. Speciálisan, a negációhoz, a konjunkcióhoz és a diszjunkcióhoz rendre az $L_{\neg}$, $L_{\wedge}$, ill. $L_{\vee}$ számokat rendeljük (ti. a szóban forgó függvények valamely konkrét realizációjához szükséges szerkezeti elemek számát). Ha az f függvény előállításában

k_i számú negáció, l_i számú konjunkció és s_i számú diszjunkció szerepel, akkor legyen

$$L_f = \min (k_i L_{\neg} + l_i L_{\wedge} + s_i L_{\vee}).$$

Az f Boole-féle függvényhez ilyen módon hozzárendelt L_f számot az f függvény egyszerűségi számának nevezzük. Tekintsük valamely rögzített m esetén az összes $f_1, f_2, \dots, f_t$ ($t=2^m$) m -változós Boole-féle függvényt és legyen.

$$L(m) = \max (L_{f_1}, L_{f_2}, \dots, L_{f_t}).$$

Ha egy m -változós Boole-féle függvényt kitüntetett diszjunktív normálformában⁸ írunk fel, akkor ebben a felírásban legfeljebb m számú negáció, $(m-1) 2^m$ számú konjunkció és 2^m számú diszjunkció szerepelhet. Ily módon $L(m)$ -re azonnal adódik az

$$L(m) < m L_{\neg} + (m-1) 2^m L_{\wedge} + 2^m L_{\vee}$$

becslés. Ha tehát $m \rightarrow \infty$, akkor

$$L(m) < m \cdot 2^m L_{\wedge} (1 + \varepsilon_m),$$

ahol $\varepsilon_m \rightarrow 0$, ha $m \rightarrow \infty$.

Ha csak monoton Boole-féle függvények vizsgálatára szorítkozunk, a redukált kitüntetett diszjunktív normálforma⁹ felhasználásával a

$$L_{\text{monoton}}(m) < \left[\frac{m}{2} \right] \left(\left[\frac{m}{2} + 1 \right] \right) (L_{\wedge} + \varepsilon_m)$$

becslés adódik, ahol $[k]$ a k szám egész részét, $\binom{m}{k}$ pedig az $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ binomiális együtthatót jelenti.

A most megadott becslések a függvények ügyes felbontásával tovább javíthatók. Az első ilyen módszer C. E. SHANNON [17] nevéhez fűződik. C. E. SHANNON egy $m(=l+n)$ -változós függvényre az

$$f(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_n) = V x_1^{\sigma_1} \dots x_l^{\sigma_l} f(\sigma_1, \dots, \sigma_l, y_1, \dots, y_n)$$

felbontást használja, ahol $x^0 = \bar{x}$ és $x^1 = x$, majd az $n = \lg(m-3 \lg m)$ és $l = m - \lg(m-3 \lg m)$ megválasztással az

$$L(m) < \frac{2^m}{m} (2L_{\wedge} + L_{\vee})(1 + \varepsilon_m)$$

becsléshez jut el.

SHANNON módszerének felhasználásával O. B. LUPANOV [11] ezt a becslést tovább finomítja. Egy $m(=\lambda + \mu + \nu)$ -változós f Boole-féle függvényre LUPANOV szerint a λ , μ és ν számok alkalmas megválasztása mellett a SHANNON által megadott becslésnél szemmel láthatóan finomabb

⁸ Egy f Boole-féle függvény kitüntetett diszjunktív normálformáján f olyan kifejezését értjük, amelynek minden diszjunkciós tagja a változók vagy negáltjaik konjunkciója úgy, hogy egy diszjunkciós tagban minden változó pontosan egyszer szerepel negálva vagy negálatlanul.

⁹ A redukált diszjunktív normálforma diszjunkciós tagjai a függvény primimplikánsai. Ld. B. M. Г л у ш к о в [7].

$$L(m) < \frac{2^m}{m} (1 + \varepsilon_m) L_v$$

becslés adódik.

Cikkünk korlátozott terjedelme miatt nem áll módunkban, hogy ezeknek az érdekes és fontos problémáknak bővebb tárgyalását adjuk. A most érintett kérdések pontos tárgyalását és a Boole-féle függvények elméletének további kérdéseit illetően C. E. SHANNON és O. B. LUPANOV már említett dolgozataira, továbbá N. E. KOBRINSKIJ és B. A. TRAHTENBROT [10] könyvére utalhatunk.

IRODALOM

- [1] AUFENKAMP, D., D., HOHN, F., S.: IRE Trans. Electr. Comp. 6, No 4, 276, 1957.
- [2] БЛОХ, А., Ш.: Пробл. киберн., 3, 81, 1960.
- [3] FLECK, A., C.: Journ. Ass. Comp. Mach., 9, 469, 1962.
- [4] GILL, A.: IRE Trans. Circuit Theory, 7, No 2, 178, 1960.
- [5] ГЛУШКОВ, В., М.: ДАН УССР, 9, 1151, 1960.
- [6] ————— Успехи матем. наук, 16, М 5, 3, 1961.
- [7] ————— Синтез цифровых автоматов, Москва, 1962, Физматгиз.
- [8] ЯБЛОНСКИЙ, С., В.: Труды матем. ин-та им В. А. Стеклова, 51, 5, 1958.
- [9] KLEENE, S., C.: Automata Studies, ed. by C. E. Shannon and J. McCarthy, Princeton, 1956.
- [10] КОБРИНСКИЙ Н., Е., Трахтенброт, Б., А.: Введение в теорию конечных автоматов, Москва, 1962, Физматгиз.
- [11] ЛУПАНОВ, О., Б.: Изв. высш. учебн. завед., Радиофиз., № 1, 1958.
- [12] McNAUGHTON, R., F., YAMADA, H.: IRE Trans. Electr. Comp., 9, No 1, 39, 1960.
- [13] MEALY, G. H.: Bell System Techn. Journ., 34, 1045, 1955.
- [14] МЕДВЕДЕВ, Ю., Т.: Сборник „Автоматы“, Москва, 1956.
- [15] MOORE, E., F.: Automata Studies, ed. by C. E. Shannon and J. McCarthy, Princeton, 1956.
- [16] RABIN, M., O., SCOTT, D.: IBM J. Res. Deb., 3, 114, 1959.
- [17] SHANNON, C., E.: Bell System Techn. Journ., 28, No 1, 59, 1949.

ÖSSZEFOGLALÁS

Gécseg F. és Peák I.

Fenti munka ismertető jellegű. Az automaták absztrakt és strukturális elméletének rövid áttekintését nyújtja.

Az első részben az automaták absztrakt elméletének rövid, vázlatos leírása található. A szerzők közlik a Moore, Mealy és Medvegyev automaták definícióit. Továbbá foglalkoznak az automaták absztrakt analízisével és szintézisével kapcsolatos lényegesebb kérdésekkel.

A cikk második részében az automaták strukturális szintézisének ismertetésére kerül sor a $\{0; 1\}$ strukturális ábécé esetében. Ezzel kapcsolatban a negáció, diszjunkció és konjunkció egy-egy elektroncsöves előállítás is közlésre kerül. Végül a szerzők a logikai függvények realizálásához szükséges szerkezeti elemek (elektroncső, relé, stb.) számára vonatkozó becsléseket ismertetnek.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

Гечег, Ф. и Пеак, И.

Статья имеет обзорный характер. В ней излагаются некоторые основные идеи и результаты (в большинстве случаев без доказательств), касающиеся как абстрактной, так и структурной теории инициальных автоматов. Кроме того, показываются некоторые методы физической реализации некоторых булевых функций, связанных со структурной теорией автоматов, а именно, методы реализации конъюнкции, дизъюнкции и негации.

Первая часть работы посвящена короткому изложению основ абстрактной теории автоматов. Вводятся понятия автоматов Милли, Мура и Медведева, рассматривается связь между автоматами и автоматными отображениями, сформулируется задача анализа и синтеза и указывается метод решения этих двух задач в случае конечных автоматов, пользуясь языком событий, предложенным С. К. Клини [9].

Во второй части, посвященной структурной теории автоматов, вводятся понятия упомынающих и логических элементов, композиции автоматов, а после этого, ставится задача структурного и комбинационного синтеза, задается некоторая функционально полная система булевых функций и доказывается, что задачу структурного синтеза можно свести к задаче функционального синтеза. Работа кончается перечислением нескольких результатов, касающихся по возможности простого представления булевых функций.

ON THE MATHEMATICAL THEORY OF AUTOMATA

Gécseg, F. and Peák, I.

The present paper is a survey in itself. There are explained in it some fundamental ideas and results (mostly without proofs) involving both the abstract and the structural theory of initial automata. Moreover, there have been considered certain methods of the technical realization of some Boolean functions, in connection with the structural theory of automata, especially, the methods of realization of conjunction, disjunction and negation.

The first part of the paper is devoted to the short summary of the fundamentals of the abstract theory. We introduce the notion of automata in the sense of Mealy, Moore resp. Medvedev; we consider the connection between the automata themselves as well as the mappings induced by them; we set up the problems of analysis and of synthesis and show the solution of these problems in the case of finite automata by making use of the language of events due to S. C. KLEENE [9].

The second part deals with the structural theory; we introduce the notions of memory elements, of logical ones, of the composition of automata. Then we set up the task of structural and combinatorial synthesis, we determine a certain system of Boolean functions being functionally complete, and we prove that the problem of structural synthesis can be reduced to the task of the combinatorial one. Finally, the paper enumerates some results concerning the question of an as simple as possible representation of the Boolean functions.